Capítulo 2

MAGNITUDES FÍSICAS

MAGNITUDES FÍSICAS

Es todo aquello que se puede expresar cuantitativamente, dicho en otras palabras es susceptible a ser medido.

¿Para qué sirven las magnitudes físicas? sirven para traducir en números los resultados de las observaciones; así el lenguaje que se utiliza en la Física será claro, preciso y terminante.

CLASIFICACIÓN DE LAS MAGNITUDES FÍSICAS

1.- POR SU ORIGEN

A) *Magnitudes Fundamentales*

Son aquellas que sirven de base para escribir las demás magnitudes.
En mecánica, tres magnitudes fundamentales son suficientes: La longitud, la masa y el tiempo.
Las magnitudes fundamentales son:

Longitud (L)	,	Intensidad de corriente eléctrica (I)
Masa (M)	,	Temperatura termodinámica (θ)
Tiempo (T)	,	Intensidad luminosa (J)
		Cantidad de sustancia (μ)

B) *Magnitudes Derivadas*

Son aquellas magnitudes que están expresadas en función de las magnitudes fundamentales; *Ejemplos:*

Velocidad	,	*Trabajo*	,	*Presión*
Aceleración	,	*Superficie (área)*	,	*Potencia, etc.*
Fuerza	,	*Densidad*		

C) *Magnitudes Suplementarias*

(Son dos), realmente no son magnitudes fundamentales ni derivadas; sin embargo se les considera como magnitudes fundamentales:

Ángulo plano (ϕ)	,	Ángulo sólido (Ω)

2.- POR SU NATURALEZA

A) *Magnitudes Escalares*

Son aquellas magnitudes que están perfectamente determinadas con sólo conocer su valor numérico y su respectiva unidad.

Ejemplos:

VOLUMEN

TEMPERATURA

TIEMPO

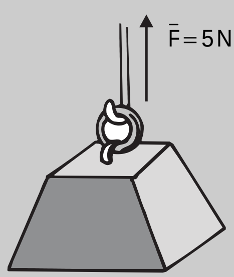
Como se verá en todos estos casos, sólo se necesita el valor numérico y su respectiva unidad para que la magnitud quede perfectamente determinada.

B) *Magnitudes Vectoriales*

Son aquellas magnitudes que además de conocer su valor numérico y unidad, se necesita la dirección y sentido para que dicha magnitud quede perfectamente determinada.

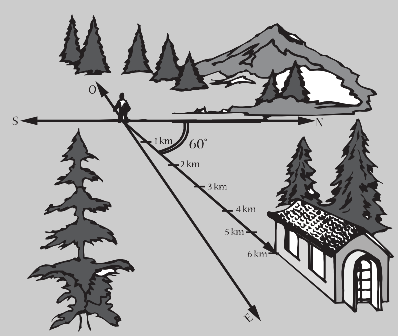
Ejemplos:

FUERZA



Sabemos que la fuerza que se está aplicando al bloque es de 5 Newton; pero de no ser por la flecha (vector) que nos indica que la fuerza es vertical y hacia arriba; realmente no tendríamos idea si se aplica hacia arriba o hacia abajo. La fuerza es una magnitud vectorial.

DESPLAZAMIENTO



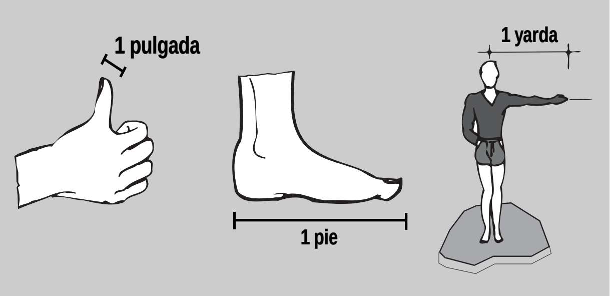
El desplazamiento indica que mide 6 km y tienen una orientación N 60º E (tiene dirección y sentido) con lo cual es fácil llegar del punto "o" a la casa.

SISTEMA DE UNIDADES - NOTACIÓN EXPONENCIAL

SISTEMA DE UNIDADES

La necesidad de tener una unidad homogénea para determinada magnitud, obliga al hombre a definir unidades convencionales.

Origen del Sistema de Unidades:



Convencionalmente:

1 pulgada	=	2,54 cm
1 pie	=	30,48 cm
1 yarda	=	91,14 cm

El 14 de octubre de 1 960, la Conferencia General de Pesas y Medidas, estableció el Sistema Internacional de Unidades (S.I.), que tiene vigencia en la actualidad y que en el Perú se reglamentó según la ley N° 23560.

Existe 3 tipos de unidades en el **Sistema Internacional (S.I)**, estas son:

1. UNIDADES DE BASE

Son las unidades respectivas de las magnitudes fundamentales.

MAGNITUD	UNIDAD	SIMBOLO	PATRON PRIMARIO
Longitud	metro	m	Basado en la longitud de onda de la luz emitida por una lámpara de criptón especial.
Masa	kilogramo	kg	Un cilindro de aleación de platino que se conserva en el laboratorio Nacional de Patrones en Francia.
Tiempo	segundo	s	Basado en la frecuencia de la radiación de un oscilador de cesio especial.
Intensidad de Corriente Eléctrica	Ampere	A	Con base en la de fuerza magnética entre dos alambres que transportan la misma corriente.
Temperatura Termodinámica	Kelvin	K	Definido por la temperatura a la que hierve el agua y se congela simultáneamente si la presión es adecuada.
Intensidad Luminosa	Candela	cd	Basado en la radiación de una muestra de platino fundido preparada especialmente.
Cantidad de Sustancia	mol	mol	Con base en las propiedades del carbono 12.

2. UNIDADES SUPLEMENTARIAS

Son las unidades correspondientes a las magnitudes suplementarias, sin embargo se les considera como unidades de base.

MAGNITUD	UNIDAD	SIMBOLO
Angulo Plano	radián	rad
Angulo Sólido	estereorradián	sr

3. UNIDADES DERIVADAS

Son las unidades correspondientes a las magnitudes derivadas. A continuación sólo se presentarán algunas de ellas.

MAGNITUD	UNIDAD	SIMBOLO
Fuerza	Newton	N
Superficie (Area)	metro cuadrado	m^2
Velocidad	metro por segundo	m/s
Volumen	metro cúbico	m^3
Trabajo	Joule	J
Presión	Pascal	Pa
Potencia	Watt	W
Frecuencia	Hertz	Hz
Capacidad Eléctrica	faradio	f
Resistencia Eléctrica	Ohm	Ω

OBSERVACIONES

- El símbolo de una unidad no admite punto al final.
- Cada unidad tiene nombre y símbolo; estos se escriben con letra minúscula, a no ser que provenga del nombre de una persona, en cuyo caso se escribirán con letra mayúscula.

NOTACIÓN EXPONENCIAL

En la física, es muy frecuente usar números muy grandes, pero también números muy pequeños; para su simplificación se hace uso de los múltiplos y submúltiplos.

1. MÚLTIPLOS

PREFIJO	SÍMBOLO	FACTOR DE MULTIPLICACIÓN
Deca	D	$10^1 = 10$
Hecto	H	$10^2 = 100$
Kilo	k	$10^3 = 1\,000$
Mega	M	$10^6 = 1\,000\,000$
Giga	G	$10^9 = 1\,000\,000\,000$
Tera	T	$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$
Peta	P	$10^{15} = 1\,000\,000\,000\,000\,000$
Exa	E	$10^{18} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000$

2. SUBMÚLTIPLOS

PREFIJO	SÍMBOLO	FACTOR DE MULTIPLICACIÓN
deci	d	$10^{-1} = 0{,}1$
centi	c	$10^{-2} = 0{,}01$
mili	m	$10^{-3} = 0{,}001$
micro	µ	$10^{-6} = 0{,}000\,001$
nano	n	$10^{-9} = 0{,}000\,000\,001$
pico	p	$10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$
femto	f	$10^{-15} = 0{,}000\,000\,000\,000\,001$
atto	*a*	$10^{-18} = 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,001$

OBSERVACIONES

- Los símbolos de los múltiplos o submúltiplos se escriben en singular.
- Todos los nombres de los prefijos se escribirán en minúscula.
- Los símbolos de los prefijos para formar los múltiplos se escriben en mayúsculas, excepto el prefijo de kilo que por convención será con la letra k minúscula. En el caso de los submúltiplos se escriben con minúsculas.
- Al unir un múltiplo o submúltiplo con una unidad del S.I. se forma otra nueva unidad.

Ejemplo:

Unidad del S.I.	m	(metro)
Nuevas Unidades	km	(kilómetro)
	cm	(centímetro)

- La escritura, al unir múltiplo o submúltiplo con una unidad del S.I. es la siguiente:
  Primero: El número (valor de la magnitud).
  Segundo: El múltiplo o submúltiplo (dejando un espacio)
  Tercero: La unidad del S.I. (sin dejar espacio).

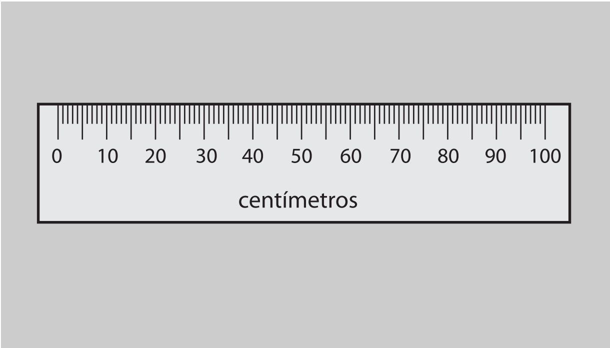
Ejemplo:

20×10^3 m = 20 km (20 kilómetros)
$36{,}4\times10^{-6}$ f = 36,4 µf (36,4 microfaradios)

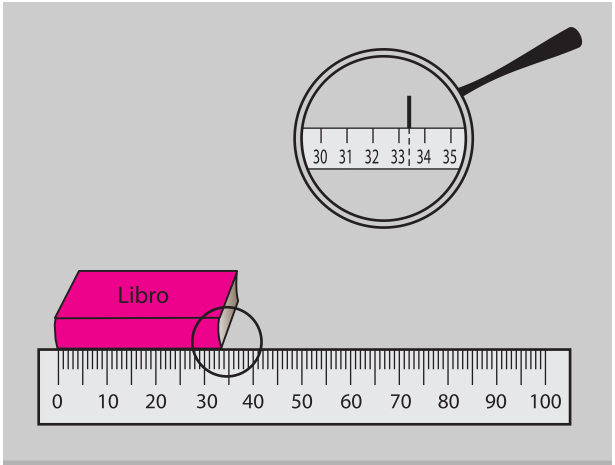
CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Cuando un observador realiza una medición, nota siempre que el instrumento de medición posee una graduación mínima:

Ilustración



La regla graduada tiene como graduación mínima el centímetro.



Al medir el largo del libro se observa que su medida está entre 33 y 34 cm.

Se podrá afirmar entonces que el largo del libro mide 33 centímetros más una fracción estimada o determinada "al ojo", así por ejemplo, nosotros podemos estimar: L = 33,5 cm.

CONCEPTO DE CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Las cifras significativas de un valor medido, están determinados por todos los dígitos que pueden leerse directamente en la escala del instrumento de medición más un dígito estimado.

En el ejemplo del libro, la longitud del mismo se puede expresar así:

33,5 cm ; 335 mm ; 0,335 m

Es notorio que el número de cifras significativas en el presente ejemplo es tres.

El número de cifras significativas en un valor medido, generalmente se determina como sigue:

- El dígito distinto de cero que se halle más a la izquierda es el más significativo.
- El dígito que se halle más a la derecha es el menos significativo, incluso si es cero.
- El cero que se coloca a la izquierda del punto de una fracción decimal no es significativo.
  20 ; tiene una cifra significativa.
  140 ; tiene dos cifras significativas.
  140,0 ; tiene cuatro cifras significativas.
  1 400 ; tiene dos cifras significativas.
- Todos los dígitos que se hallen entre los dígitos menos y más significativos son significativos.

Ejemplo; determinar el número de cifras significativas:

4,356 m ; tiene cuatro cifras significativas.
0,23 m ; tiene dos cifras significativas.
0,032 m ; tiene dos cifras significativas
36,471 2 m; tiene seis cifras significativas
6,70 m ; tiene tres cifras significativas
321,2 m ; tiene cuatro cifras significativas
2,706 m ; tiene cuatro cifras significativas

TEST

1.- Entre las alternativas, una de las unidades no corresponde a las magnitudes fundamentales del sistema internacional:

a) metro (m)
b) Pascal (Pa)
c) Amperio (A)
d) candela (cd)
e) segundo (s)

2.- ¿Qué magnitud está mal asociada a su unidad base en el S.I.?

a) Cantidad de sustancia - kilogramo
b) Tiempo - segundo
c) Intensidad de corriente - Amperio
d) Masa - kilogramo
e) Temperatura termodinámica - kelvin

3.- ¿Cuál de las unidades no corresponde a una unidad fundamental en el S.I.?

a) A – Amperio
b) mol - mol
c) C - Coulomb
d) kg - kilogramo
e) m - metro

4.- Entre las unidades mencionadas, señala la que pertenece a una unidad base en el S.I.

a) N – Newton
b) Pa - Pascal
c) C - Coulomb
d) A - Amperio
e) g - gramo

5.- ¿Qué relación no corresponde?

a) $1\ \text{GN} = 10^{9}\ \text{N}$
b) $2\ \text{TJ} = 2\times 10^{12}\ \text{J}$
c) $1\ \text{nHz} = 10^{-9}\ \text{Hz}$
d) $3\ \text{MC} = 3\times 10^{9}\ \text{C}$
e) $5\ \text{pA} = 5\times 10^{-12}\ \text{A}$

6.- Al convertir una señal de camino al sistema métrico, sólo se ha cambiado parcialmente. Se indica que una población está a 60 km de distancia, y la otra a 50 millas de distancia (1 milla = 1,61 km). ¿Cuál población está más distante y en cuántos kilómetros?

a) 50 millas y por $2{,}05\times 10^{4}$ m
b) 20 millas y por $2{,}1\times 10^{4}$ m
c) 30 millas y por $2{,}1\times 10^{5}$ m
d) 40 millas y por 10^{4} m
e) N.A.

7.- Un estudiante determinado medía 20 pulg de largo cuando nació. Ahora tiene 5 pies, 4 pulg y tiene 18 años de edad. ¿Cuántos centímetros creció, en promedio, por año?

a) 6,2 cm
b) 5,3 cm
c) 5,4 cm
d) 6,7 cm
e) 4,3 cm

8.- ¿Cuál de las siguientes alternativas tiene mayor número de cifras significativas?

a) 0,254 cm
b) $0{,}002\,54\times 10^{2}$ cm
c) 254×10^{-3} cm
d) $2{,}54\times 10^{-3}$ m
e) Todos tienen el mismo número

9.- Determine el número de cifras significativas en las siguientes cantidades medidas:
(a) 1,007 m, (b) 8,03 cm, (c) 16,722 kg, (d) 22 m

	a	b	c	d
a)	4	3	5	3
b)	2	2	5	2
c)	4	3	5	2
d)	1	1	3	2
e)	2	1	3	2

10.- ¿Cuál de las cantidades siguientes tiene tres cifras significativas?

a) 305 cm
b) 0,050 0 mm
c) 1,000 81 kg
d) 2 m
e) N.A.

PROBLEMAS RESUELTOS

A PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1.- Efectuar: $E = 5\,000\,0 \times 0{,}01$

Solución:

$$E = \left(5\times10^{4}\right)\left(1\times10^{-2}\right)$$

$$E = 5\times10^{4-2} = 5\times10^{2}$$

$$\boxed{E = 500}$$

2.- Efectuar: $E = 0{,}005\times10^{-4}\times30\,000\,000$

Solución:

$$E = \left(5\times10^{-3}\right)\left(10^{-4}\right)\left(3\times10^{7}\right)$$

$$E = 5\times10^{-3-4+7} = 5\times10^{0}$$

$$\boxed{E = 5}$$

3.- Convertir: 400 320 m a km

Solución:

$$400\,320\ \text{m} = 400\,320\ \text{m}\times\frac{1\ \text{km}}{1\,000\ \text{m}}$$

$$\boxed{400\,320\ \text{m} = 400{,}320\ \text{km}}$$

4.- Convertir: $360\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Solución:

$$360\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 360\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\times\frac{1\,000\ \text{m}}{1\ \text{km}}\times\frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}}$$

$$360\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{(360)(1\,000)}{3\,600}\ \text{m/s}$$

$$360\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{36\times10^{4}}{36\times10^{2}} = 10^{4-2}\ \text{m/s}$$

$$\boxed{360\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 100\ \text{m/s}}$$

5.- ¿Cuántos Gm tendrás en 2 230 m?

Solución:

$$2\,230\ \text{m} = 2{,}23\times10^{3}\ \text{m}\times\frac{1\ \text{Gm}}{10^{9}\ \text{m}}$$

$$2\,230\ \text{m} = 2{,}23\times10^{3-9}\ \text{Gm}$$

$$\boxed{2\,230\ \text{m} = 2{,}23\times10^{-6}\ \text{Gm}}$$

B PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1.- Dar la expresión reducida: $E = \dfrac{(9\,000)^{3}(0{,}000\,81)^{2}}{(0{,}000\,000\,243)^{2}}$

Solución:

$$E = \frac{(3^{2}\times10^{3})^{3}\,(81\times10^{-5})^{2}}{(243\times10^{-9})^{2}} = \frac{3^{6}\times10^{9}\,(3^{4}\times10^{-5})^{2}}{(3^{5}\times10^{-9})^{2}}$$

$$E = \frac{3^{6}\times10^{9}\times3^{8}\times10^{-10}}{3^{10}\times10^{-18}} = 3^{(6+8-10)}\times10^{(9-10+18)}$$

$$E = 3^{(6+8-10)}\times10^{(9-10+18)}$$

$$E = 3^{4}\times10^{17}$$

$$\boxed{E = 81\times10^{17}}$$

2.- Dar el valor simplificado de:

$$R = \frac{(25\,000)^{5}(0{,}000\,125)^{3}}{(0{,}006\,25)^{2}(0{,}05)^{4}}$$

Solución:

$$R = \frac{(25\,000)^{5}(0{,}000\,125)^{3}}{(0{,}006\,25)^{2}(0{,}05)^{4}}$$

$$R = \frac{\left(25\times10^{3}\right)^{5}\left(125\times10^{-6}\right)^{3}}{\left(625\times10^{-5}\right)^{2}\left(5\times10^{-2}\right)^{4}}$$

$$R = \frac{\left(5^{2}\times10^{3}\right)^{5}\left(5^{3}\times10^{-6}\right)^{3}}{\left(5^{4}\times10^{-5}\right)^{2}\left(5\times10^{-2}\right)^{4}}$$

$$R = \frac{5^{10}\times10^{15}\times5^{9}\times10^{-18}}{5^{8}\times10^{-10}\times5^{4}\times10^{-8}}$$

$$R = 5^{(10+9-8-4)}\times10^{(15-18+10+8)}$$

$$\boxed{R = 5^{7}\times10^{15}}$$

3.- Hallar la altura del nevado Huascarán en hectómetros si expresado en metros mide 6 780 m.

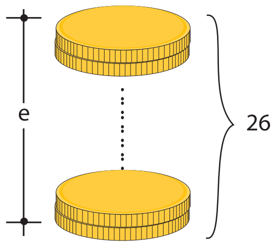
Solución:

$$6\,780\ \text{m} = 6\,780\ \text{m}\times\frac{1\ \text{Hm}}{10^{2}\ \text{m}}$$

$$\boxed{6\,780\ \text{m} = 67{,}80\ \text{Hm}}$$

4.- Dar el espesor que forman 26 monedas en lo que cada una de ellas tiene un espesor de 2 mm; expresar dicho resultado en nm.

Solución:



$e = 26 \times 2\ \text{mm}$

$e = 26 \times 2\ \text{mm} \times \dfrac{1\ \text{m}}{1\,000\ \text{mm}}$

$e = 52 \times 10^{-3}\ \text{m}$

$e = 52 \times 10^{-3}\ \text{m} \times \dfrac{1\ \text{nm}}{10^{-9}\ \text{m}}$

$e = 52 \times 10^{-3} \times 10^{+9}\ \text{nm}$

$\boxed{e = 52 \times 10^{6}\ \text{nm}}$

5.- Un cabello humano crece a razón de 1,08 mm por día. Expresar este cálculo en Mm / s.

Solución:

$V = \dfrac{1{,}08\ \text{mm}}{1\ \text{día}} = \dfrac{1{,}08\ \text{mm}}{24\ \text{h}}$

$V = \dfrac{1{,}08}{24}\dfrac{\text{mm}}{\text{h}} \times \dfrac{1\ \text{m}}{1\,000\ \text{mm}} \times \dfrac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}}$

$V = \dfrac{108 \times 10^{-2}}{24 \times 10^{3} \times 36 \times 10^{2}}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$V = 0{,}125 \times 10^{-7}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$V = 0{,}125 \times 10^{-7}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \times \dfrac{1\text{M}\frac{\text{m}}{\text{s}}}{10^{6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$

$\boxed{V = 0{,}125 \times 10^{-13}\ \dfrac{\text{Mm}}{\text{s}}}$

6.- Expresar en potencias de 10.

$$Q = \frac{\sqrt{0{,}000\,625}\ \sqrt[3]{0{,}000\,064}}{(0{,}05)^2(0{,}016)^4}$$

Solución:

$$Q = \frac{\left(625 \times 10^{-6}\right)^{1/2}\left(64 \times 10^{-6}\right)^{1/3}}{\left(5 \times 10^{-2}\right)^2\left(16 \times 10^{-3}\right)^4}$$

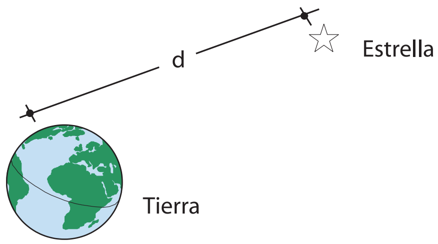
$$Q = \frac{\left(5^4 \times 10^{-6}\right)^{1/2}\left(2^6 \times 10^{-6}\right)^{1/3}}{\left(5^2 \times 10^{-4}\right)\left(2^4 \times 10^{-3}\right)^4}$$

$$Q = \frac{5^2 \times 10^{-3} \times 2^2 \times 10^{-2}}{5^2 \times 10^{-4} \times 2^{16} \times 10^{-12}} = 2^{-14} \times 10^{(-3-2+4+12)}$$

$\boxed{Q = 2^{-14} \times 10^{11}}$

7.- Hallar en Em la distancia que existe desde la tierra a una estrella, siendo esta distancia equivalente a 2 años luz. (1 año luz = distancia que recorre la luz en un año de 365 días). Considere que la luz recorre 300 000 km en 1 segundo.

Solución:



d = 2 año luz

1 año luz = $300\,000\ \dfrac{\text{km}}{\text{s}} \times 365$ días

$1\text{año luz} = 300\,000\ \dfrac{\text{km}}{\text{s}} \times 365\ \text{dia} \times \dfrac{24\ \text{h}}{1\ \text{dia}} \times \dfrac{3\,600\ \text{s}}{1\ \text{h}}$

$1\text{año luz} = 300\,000 \times 365 \times 24 \times 3\,600\ \text{km}$

$1\text{año luz} = 3 \times 10^{5} \times 365 \times 24 \times 36 \times 10^{2}\ \text{km}$

$1\text{año luz} = 946\,080 \times 10^{7}\ \text{km} \times \dfrac{1\,000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \times \dfrac{1\ \text{Em}}{10^{18}\ \text{m}}$

$1\text{año luz} = 946\,080 \times 10^{7} \times 10^{3} \times 10^{-18}\ \text{Em}$

$1\text{año luz} = 946\,080 \times 10^{-8}\ \text{Em}$

Finalmente:

$d = 2\left(946\,080 \times 10^{-8}\ \text{Em}\right)$

$d = 1\,892\,160 \times 10^{-8}\ \text{Em}$

$\boxed{d \approx 19 \times 10^{-3}\ \text{Em}}$

8.- Convertir: 30 m/s a milla/h
1 milla = 1 609, 347 m

Solución:

$30\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} = 30\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \times \dfrac{3\,600\ \text{s}}{1\ \text{h}}\ \dfrac{1\ \text{milla}}{1\,609{,}347\ \text{m}}$

$$30\,\frac{m}{s}=\frac{30\times 3\,600}{1\,609{,}347}\,\frac{\text{milla}}{h}$$

$$\boxed{30\,\frac{m}{s}=67{,}108\,\frac{\text{milla}}{h}}$$

9.- Convertir: 1kw-h a Joule (J) ; 1 kw = 1 kilowatt

$$\text{watt}=\frac{\text{Newton}}{s}$$

Solución:

$$1\text{ kw-h}=kw\times h$$

$$1\text{ kw-h}=kw\times h\times\frac{1\,000\text{ w}}{1\,kw}\times\frac{3\,600\text{ s}}{1\,h}$$

$$1\text{ kw-h}=36\times 10^5\ w\times s$$

$$1\text{ kw-h}=36\times 10^5\ w\times s\times\frac{\frac{\text{Joule}}{s}}{1w}$$

$$\boxed{1\text{ kw-h}=36\times 10^5\ \text{Joule}}$$

10. Convertir:

$$\frac{lb}{pulg^3}\ \text{a}\ \frac{\text{gramo}}{\text{mililitro}}\left(\frac{g}{ml}\right)$$

1 litro = 1dm^3 ; 1 kg = 2,2 lb ; 1 pulg = 0,254 dm

Solución:

* $1\,kg=2{,}2\,lb$

$1\,000\,g=2{,}2\,lb$

$1\,g=2{,}2\times 10^{-3}\,lb$

* $1\,\text{litro}=1dm^3$

$$\frac{1\,\text{litro}}{1\,000}=\frac{1}{1\,000}\,dm^3$$

$1\,ml=10^{-3}\,dm^3$

* $$\frac{1\,lb}{pulg^3}=\frac{1\,lb}{pulg^3}\times\frac{1\,g}{2{,}2\times 10^{-3}\,lb}\times\frac{1\,pulg^3}{(0{,}254\ dm)^3}$$

$$\frac{1\,lb}{pulg^3}=\frac{1}{\left(2{,}2\times 10^{-3}\right)(0{,}254)^3}\times\frac{g}{dm^3}$$

$$\frac{1\,lb}{pulg^3}=27\,738{,}1\,\frac{g}{dm^3}$$

$$\frac{1\,lb}{pulg^3}=27\,738{,}1\,\frac{g}{dm^3}\times\frac{10^{-3}dm^3}{1\,ml}$$

$$\boxed{\frac{1\,lb}{pulg^3}=27{,}738\,1\,\frac{g}{ml}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1.- Efectuar: E = 0,002×2 000

Rpta. $\boxed{E=4}$

2.- Efectuar: E = 2 250×0,02×0,000 004×10^6

Rpta. $\boxed{E=180}$

3.- Efectuar: $E=\dfrac{4\,000\,004\times 10^{-4}\times 0{,}003}{0{,}000\,004\times 10^4}$

Rpta. $\boxed{E=30{,}000\,03}$

4.- ¿Cuál es el resultado de efectuar: $E=\dfrac{2{,}635\times 26{,}35}{0{,}000\,263\,5}$?

Rpta. $\boxed{E=26{,}35\times 10^4}$

5.- Expresar el resultado en notación científica.

$$E=\frac{\sqrt[3]{27\,000\,000}}{\sqrt[4]{0{,}008\,1}}$$

Rpta. $\boxed{E=10^3}$

6.- Dar el resultado de efectuar:

$$E=\frac{0{,}003\times 49\,000\times 0{,}9\times 0{,}081}{8\,100\times 270\times (0{,}7)^2}$$

Rpta. $\boxed{E=10^{-5}}$

7.- ¿Qué distancia en Mm recorrió un móvil que marcha a 36 km/h en 2 Es?

Rpta. $\boxed{2\times 10^{13}}$

8.- En un cm^3 de agua se tiene aproximadamente 3 gotas, en 6 m^3 ¿Cuántas gotas tendremos?

Rpta. $\boxed{18 \times 10^6 \text{ gotas}}$

9.- ¿A cuántos kPa equivalen 25 GN distribuidos en 5 Mm^2? ($Pa = N/m^2$)

Rpta. $\boxed{5 \text{ kPa}}$

10.- Si 1J = N·m, expresar en pJ el producto de 6 GN por 12 *a*m.

Rpta. $\boxed{72 \times 10^3 \text{ pJ}}$

B PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1.- Efectuar: $E = \dfrac{0{,}000\,020\,123}{146\,234} \times 25 \times 10^5$

Rpta. $\boxed{E = 3{,}44 \times 10^{-4}}$

2.- Efectuar: $E = \dfrac{0{,}000\,000\,000\,004}{0{,}000\,006} \times \dfrac{45\,000\,000}{30\,000}$

Rpta. $\boxed{E = 0{,}001}$

3.- Efectuar: $E = \dfrac{(0{,}000\,000\,004\,002)^3}{45\,000} \times \dfrac{10^{19} \times 22}{0{,}006}$

Rpta. $\boxed{E = 5{,}223 \times 10^{-8}}$

4.- Halla la expresión reducida en (pN)

$$E = \frac{(6{,}4\text{ GN}) \cdot (0{,}000\,32\text{ fN}) \cdot (1600\text{ kN})}{(12{,}8\text{ TN}) \cdot (8\,\mu\text{N})}$$

Rpta. $\boxed{32 \text{ pN}}$

5.- Halla la expresión reducida en:

$$M = \frac{(0{,}000\,008\text{ J})^2 (128\,000\text{ J})^3}{(0{,}025\,6\text{ J})^4 (400\text{ N})} \;;\; 1J = N \cdot \frac{m}{s^2}$$

Rpta. $\boxed{M = 2^{-7} \times 10^{11} \text{ m/s}^2}$

6.- En un cultivo bacterial se observa que se reproducen en progresión geométrica cada hora, en razón de 2 000 bacterias. Si inicialmente se tuvo 8 bacterias. ¿Cuántas habrían en 3 horas? Expresar este resultados en Gbacterias?

Rpta. $\boxed{64 \text{ Gbacterias}}$

7.- Una pelota de 0,064 5 m de diámetro está sobre un bloque que tiene 0,010 9 m de alto. ¿A qué distancia está la parte superior de la pelota por sobre la base del bloque? (Dar su respuesta en metros)

Rpta. $\boxed{7{,}54 \times 10^{-2} \text{ m}}$

8.- Se ha encontrado que en 1 kg de arena se tiene $6{,}023 \times 10^{23}$ granos de arena. ¿Cuántos ng habrá en $18{,}069 \times 10^{28}$ granos de arena?

Rpta. $\boxed{3 \times 10^{17} \text{ ng}}$

9.- Una bomba atómica libera 40 GJ de energía. ¿Cuántas bombas se destruyeron si se obtuvo 64×10^{36} J de energía?

Rpta. $\boxed{16 \times 10^{26} \text{ bombas}}$

10.- Un cuerpo tiene una masa de 1 500 Mg y un volumen de 4 500 km^3. Hallar su densidad en $\mu g/m^3$.

Rpta. $\boxed{\dfrac{1}{3} \times 10^3 \dfrac{\mu g}{m^3}}$

ANÁLISIS DIMENSIONAL

Estudia la forma como se relacionan las magnitudes derivadas con las fundamentales.

Toda unidad física, está asociada con una dimensión física.
Así, el metro es una medida de la dimensión "longitud" (L), el kilogramo lo es de la "masa" (M), el segundo pertenece a la dimensión del "tiempo" (T).
Sin embargo, existen otras unidades, como el m/s que es unidad de la velocidad que puede expresarse como la combinación de las antes mencionadas.

$$\text{Dimensión de velocidad} = \frac{\text{Dimensión de longitud}}{\text{Dimensión del tiempo}}$$

Así también, la aceleración, la fuerza, la potencia, etc, pueden expresarse en términos de las dimensiones (L), (M), y/o (T).
El análisis de las Dimensiones en una ecuación, muchas veces nos muestra la veracidad o la falsedad de nuestro proceso de operación; esto es fácil de demostrar ya que el signo "=" de una ecuación indica que los miembros que los separa deben de tener las mismas dimensiones.
Mostraremos como ejemplo:

$$A \times B \times C = D \times E \times F$$

Es una ecuación que puede provenir de un desarrollo extenso, una forma de verificar si nuestro proceso operativo es correcto, es analizándolo dimensionalmente, así:

$$(\text{dimensión de longitud})^2 = (\text{dimensión de longitud})^2$$

En el presente caso comprobamos que ambos miembros poseen las mismas dimensiones, luego la ecuación es correcta.

En la aplicación del Método Científico, ya sea para la formulación de una hipótesis, o en la experimentación también es recomendable usar el Análisis Dimensional.

Fines del análisis dimensional

1.- El análisis dimensional sirve para expresar las magnitudes derivadas en términos de las fundamentales.
2.- Sirven para comprobar la veracidad de las fórmulas físicas, haciendo uso del principio de homogeneidad dimensional.
3.- Sirven para deducir las fórmulas a partir de datos experimentales.

ECUACIONES DIMENSIONALES

Son expresiones matemáticas que colocan a las magnitudes derivadas en función de las fundamentales; utilizando para ello las reglas básicas del algebra, menos las de suma y resta.
Estas ecuaciones se diferencian de las algebraicas porque sólo operan en las magnitudes.

NOTACIÓN

A : Se lee letra "A"

[A] : Se lee ecuación dimensional de A

Ejemplos: Hallar la Ecuación Dimensional de:

Velocidad (v)

$$v = \frac{e}{t} \Rightarrow [v] = \frac{[e]}{[t]} = \frac{L}{T}$$

$$\boxed{[v] = LT^{-1}}$$

Aceleración (a)

$$\boldsymbol{a} = \frac{v}{t} \Rightarrow [\boldsymbol{a}] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{LT^{-1}}{T}$$

$$\boxed{[\boldsymbol{a}] = LT^{-2}}$$

Fuerza (F)

$F = m.a$; siendo a = aceleración

$[F] = [m].[a]$

$$\boxed{[F] = MLT^{-2}}$$

Trabajo (W)

$W = F.d$

$W = F.d \Rightarrow [W] = [F][d] = MLT^{-2}L$

$$\boxed{[W] = ML^2T^{-2}}$$

Potencia (P)

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow [P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{ML^2T^{-2}}{T}$$

$$\boxed{[P] = ML^2T^{-3}}$$

Area (A)

A = (Longitud)×(Longitud) $\Rightarrow$ $[A] = L \cdot L$

$$\boxed{[A] = L^2}$$

Volumen (V)

V = (Longitud)×(Longitud)×(Longitud)

$$\boxed{[V] = L^3}$$

Presión (P)

$$P = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Area}} \Rightarrow [P] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2}$$

$$\boxed{[P] = ML^{-1}T^{-2}}$$

Densidad (D)

$$D = \frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} \Rightarrow [D] = \frac{[M]}{[V]} = \frac{M}{L^3}$$

$$\boxed{[D] = ML^{-3}}$$

PRINCIPIO DE HOMOGENEIDAD

Si una expresión es correcta en una fórmula, se debe cumplir que todos sus miembros deben ser dimensionalmente homogéneos. Así:

$$\begin{array}{ccccccccc} E & - & A & + & B & + & C & = & D \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ V & & V & & V & & V & & V \end{array}$$

Por lo tanto se tendrá:

$$[E] = [A] = [B] = [C] = [D]$$

OBSERVACIÓN

Los números, los ángulos, los logaritmos y las funciones trigonométricas, no tienen dimensiones, pero para los efectos del cálculo se asume que es la unidad.

TEST

1.- Siendo "a" una magnitud física, que proposición o que proposiciones siempre se cumplen:

I. [a] + [a] + [a] = [a]
II. [a] - [a] = [a]
III. [a] - [a] = 0

a) I
b) II
c) I y II
d) III
e) N.A.

2.- ¿Cuál será las dimensiones de $Q = \sqrt{3}\ kg/m.s^2$?

a) $M L^{-1} T^{-1}$
b) $M L^{-1} T^{-2}$
c) $M L T^2$
d) $M LT^{-1}$
e) $M LT$

3.- ¿Qué relación no es correcta dimensionalmente?

a) [fuerza] = $M LT^{-2}$
b) [frecuencia] = T^{-1}
c) [velocidad angular] = T^{-1}
d) [trabajo] = $M L^2T^{-2}$
e) [carga eléctrica] = $I.T$

4.- Precisar verdadero o falso dimensionalmente:

I) $L + L + L - L = L$ ( )
II) En $\sec(P+12) \Rightarrow |P| = 1$ ( )
III) En $a^{x \cdot \frac{m}{kg}} \Rightarrow [x] = ML^{-1}$ ( )

a) VVF
b) FFF
c) VVV
d) FVV
e) FFV

5.- ¿Qué proposición o proposiciones son falsas respecto al Análisis Dimensional?

I.- Sirve para hallar las dimensiones de los cuerpos.
II.- Se emplea para verificar fórmulas propuestas.
III.- Se usa para deducir fórmulas.

a) I
b) II
c) III
d) I y II
e) III y II

6.- Respecto al análisis dimensional señalar verdadero o falso:

I.- Pueden existir dos magnitudes físicas diferentes con igual fórmula dimensional.
II.- Los arcos en la circunferencia son adimensionales.
III.- Dimensionalmente todos los ángulos y funciones trigonométricas representan lo mismo.

a) VVV
b) VVF
c) FFF
d) FFV
e) VFV

7.- Respecto a una fórmula o ecuación dimensional, señalar verdadero o falso:

I.- Todos los términos en el primer y segundo miembro tienen las mismas dimensiones.
II.- Todos los números y funciones trigonometricas que figuran como coeficientes tienen las mismas dimensiones, e igual a 1.
III.- La ecuación dimensional de los términos del primer miembro, difieren de las dimensiones del segundo miembro.

a) VVF
b) VVV
c) FVV
d) VFV
e) FVF

8.- El S.I. considera .... fundamentales y .... con carácter geométrico.

a) Tres magnitudes – dos auxiliares
b) Siete magnitudes – dos auxiliares
c) Seis magnitudes – una auxiliar
d) Tres magnitudes – una auxiliar
e) N.A.

9.- ¿Qué magnitud no está asociada a sus correctas dimensiones?

a) Velocidad - LT^{-1}
b) Fuerza - $ML T^{-2}$
c) Volumen - L^3
d) Densidad - ML^{-3}
e) Aceleración - $L T^2$

10.- ¿Qué unidad va asociada incorrectamente a las dimensiones dadas?

a) $\frac{kg \cdot s}{m}$ – MTL^{-1}

b) $kg \cdot \frac{m}{s^2}$ – MLT^{-2}

c) $A \cdot \frac{m}{s}$ – ILT

d) $\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^2}$ – $ML^2A^{-1}T^{-2}$

e) $kg \cdot \frac{m^3}{s^4}$ – ML^3T^{-4}

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1.- Halle la dimensión de "K" en la siguiente fórmula física:

$$K = \frac{m \cdot v^2}{F}$$

Donde; m : masa
F : fuerza
v : velocidad

Solución:

❑ Analizando cada elemento:

$[m] = M$

$[v] = LT^{-1}$

$[F] = MLT^{-2}$

❑ Luego tendremos:

$$[K] = \frac{[m] \cdot [v]^2}{[F]} = \frac{(M)(LT^{-1})^2}{MLT^{-2}} = \frac{ML^2T^{-2}}{MLT^{-2}}$$

$\boxed{[K] = L}$

2.- Halle la dimensión de "S" en la siguiente fórmula física:

$$S = \frac{F \cdot d}{m \cdot c^2}$$

Donde; F : fuerza
m : masa
d : distancia
v : velocidad

Solución:

❑ Analizando cada elemento:

$[F] = MLT^{-2}$

$[d] = L$

$[m] = M$

$[c] = LT^{-1}$

❑ Luego tendremos:

$$[S] = \frac{[F][d]}{[m][c]^2} = \frac{(MLT^{-2})(L)}{(M)(LT^{-1})^2} = \frac{ML^2T^{-2}}{ML^2T^{-2}}$$

$\boxed{[S] = 1}$

3.- Hallar la dimensión de "α" y "β" en la siguiente fórmula:

$$V = \alpha.A + \beta.D$$

Donde; V : volumen
A : área
D : densidad

Solución:

❑ Aplicando el principio de homogeneidad.

$$[V] = [\alpha][A] = [\beta][D]$$

❑ Determinando: $[\alpha]$

$[V] = [\alpha][A]$

$L^3 = [\alpha]L^2 \Rightarrow \boxed{[\alpha] = L}$

❑ Determinando: $[\beta]$

$[V] = [\beta][D]$

$L^3 = [\beta]ML^{-3} \Rightarrow \boxed{[\beta] = M^{-1}L^{+6}}$

4.- Si la siguiente ecuación es dimensionalmente homogénea, determinar la ecuación dimensional de "x" e "y".

Siendo; A : fuerza
B : trabajo
C : densidad

$$Ax + By = C$$

Solución:

❑ Si la expresión es dimensionalmente homogénea, entonces:

○ $Ax + By = C$

$[A][x] = [B][y] = [C]$

○ $[A] = MLT^{-2}$

$[B] = ML^2T^{-2}$

$[C] = ML^{-3}$

❑ Con lo cual se tiene:

$[A][x] = [C]$

$MLT^{-2}[x] = ML^{-3}$

$[x] = \frac{ML^{-3}}{MLT^{-2}} \Rightarrow \boxed{[x] = L^{-4}T^2}$

❑ $[B][y]=[C]$

$ML^2T^{-2}[y]=ML^{-3}$

$[y]=\frac{ML^{-3}}{ML^2T^{-2}} \Rightarrow \boxed{[y]=L^{-5}T^2}$

5.- Si la siguiente expresión es dimensionalmente homogénea: $P = q^z R^{-y} s^x$

Donde; P : presión q : fuerza
R : volumen s : longitud

Hallar: $x - 3y$

Solución:

❑ $[P]=ML^{-1}T^{-2}$ $[q]=MLT^{-2}$

$[R]=L^3$ $[s]=L$

❑ $P=q^zR^{-y}s^x$

$[P]=[q]^z[R]^{-y}[s]^x$

$ML^{-1}T^{-2}=\left(MLT^{-2}\right)^z\left(L^3\right)^{-y}(L)^x$

$ML^{-1}T^{-2}=M^zL^zT^{-2z}L^{-3y}L^x$

$ML^{-1}T^{-2}=M^zL^{z-3y+x}T^{-2z}$

$M^1=M^z \Rightarrow \boxed{z=1}$

$L^{-1}=L^{z-3y+x} \Rightarrow -1=z-3y+x$

$-1=1-3y+x$

❑ Nos piden: $x-3y$

$\boxed{x-3y = -2}$

NOTA

Las ecuaciones dimensionales sólo afectan a las bases, más no a los exponentes, pues estos siempre son números y por lo tanto estos exponentes se conservan siempre como tales (números).
De lo expuesto, queda claro que la ecuación dimensional de todo exponente es la unidad.

B PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1.- Halle la dimensión de "A" y "B" en la siguiente fórmula física.

$$\frac{W}{A}=\sqrt{\frac{v}{B}}+F$$

Donde; W : trabajo
v : volumen
F : fuerza

Solución:

❑ Aplicando el principio de homogeneidad:

$\left[\frac{W}{A}\right]=\left[\frac{v}{B}\right]^{1/2}=[F]$

❑ Determinando $[A]$

$\frac{[W]}{[A]}=[F]$

$\frac{ML^2T^{-2}}{[A]}=MLT^{-2} \Rightarrow \boxed{[A]=L}$

❑ Determinando $[B]$

$\frac{[v]^{1/2}}{[B]^{1/2}}=[F] \Rightarrow [B]^{1/2}=\frac{[v]^{1/2}}{[F]}$

$[B]=\frac{[v]}{[F]^2}=\frac{L^3}{\left(MLT^{-2}\right)^2}$

$\boxed{[B]=M^{-2}LT^4}$

2.- Halle la dimensión de "A", "B" y "C" en la siguiente fórmula física.

$$E = A.F + B.v^2 + C\cdot a$$

Donde; E : trabajo
F : fuerza
v : velocidad
a : aceleración

Solución:

❑ Aplicando el principio de homogeneidad:

$[E]=[AF]=\left[Bv^2\right]=[C\cdot a]$

❑ Determinando $[A]$:

$[E]=[A][F]$

$ML^2T^{-2}=[A]MLT^{-2} \Rightarrow \boxed{[A]=L}$

❑ Determinando $[B]$:

$$[E]=[B][v]^2$$

$$ML^2T^{-2}=[B]\left(LT^{-1}\right)^2 \Rightarrow \boxed{[B]=M}$$

❑ Determinando $[C]$:

$$[E]=[C][a]$$

$$ML^2T^{-2}=[C]LT^{-2} \Rightarrow \boxed{[C]=ML}$$

3.- Halle la dimensión de "R" en la siguiente fórmula física:

$$R=(x+t)(x^2-y)(y^2+z)$$

Donde ; t: tiempo

Solución:

❑ Observamos por el principio de homogeneidad:

$$[x]=T$$

$$[y]=[x]^2=T^2$$

$$[z]=[y]^2=\left(T^2\right)^2=T^4$$

❑ Luego tendremos:

$$[R]=[x][y][z]$$

$$[R]=T\times T^2\times T^4 \Rightarrow \boxed{[R]=T^7}$$

4.- La potencia que requiere la hélice de un helicóptero viene dada por la siguiente fórmula:

$$P=K.R^x.W^y.D^z$$

Donde; W : velocidad angular (en rad/s)
R : radio de la hélice (en m)
D : densidad del aire (en kg/m^3)
K : número

Calcular x,y,z.

Solución:

$$[P]=[K][R]^x[W]^y[D]^z$$

$$ML^2T^{-3}=(1)(L)^x\left(T^{-1}\right)^y\left(ML^{-3}\right)^z$$

$$ML^2T^{-3}=L^xT^{-y}M^zL^{-3z}$$

$$ML^2T^{-3}=M^zL^{x-3z}T^{-y}$$

$$M^1=M^z \Rightarrow \boxed{z=1}$$

$$L^2=L^{x-3(1)} \Rightarrow x-3=2 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

$$T^{-3}=T^{-y} \Rightarrow \boxed{y=3}$$

5.- Determinar las dimensiones que debe tener Q para que la expresión W sea dimensionalmente homogénea.

$$W=0{,}5\,mc^x+Agh+BP$$

Siendo: $Q=A^x\cdot\sqrt[x]{B}$;

Además; W: trabajo h : altura
m: masa P : potencia
c : velocidad
A,B : constantes dimensionales
g : aceleración

Solución:

❑ Aplicando el principio de homogeneidad:

$$[W]=[m][c]^x=[A][g][h]=[B][P]$$

❑ $[W]=[A][g][h]$

$$ML^2T^{-2}=[A]=LT^{-2}L$$

$$[A]=M$$

❑ $[B][P]=[W]$

$$[B]\cdot\frac{[W]}{[t]}=[W] \Rightarrow [B]=[t]$$

$$[B]=T$$

❑ $[W]=[m][c]^x$

$$ML^2T^{-2}=M\left(LT^{-1}\right)^x$$

$$ML^2T^{-2}=ML^xT^{-x}$$

$$x=2$$

❑ Finalmente:

$$[Q]=[A]^x[B]^{1/2}$$

$$\boxed{[Q]=M^2T^{1/2}}$$

6.- Suponga que la velocidad de cierto móvil, que se desplaza con movimiento bidimensional, puede determinarse con la fórmula empírica:

$$V=aT^3+\frac{b}{T^2-c}$$

Donde: T, es tiempo; a, b, c, son constantes dimensionales. Determine las dimensiones de a, b, y c, para que la fórmula sea homogénea dimensionalmente.

Solución:

Por el principio de homogeneidad:

❑ de: $T^2 - c \Rightarrow \boxed{[c] = T^2}$

❑ $[V] = [a][T]^3$

$LT^{-1} = [a]T^3 \Rightarrow \boxed{[a] = LT^{-4}}$

❑ $[V] = \dfrac{[b]}{T^2}$

$LT^{-1} = \dfrac{[b]}{T^2} \Rightarrow \boxed{[b] = LT}$

7.- Si la siguiente ecuación es dimensionalmente homogénea.

Hallar: "x – 2y"

$$a = vt^x\left(1 + k^{y-x}\right)$$

Siendo; a : aceleración
v : velocidad
t : tiempo

Solución:

Dimensionalmente se tiene:

$[1] = [k]^{y-x}$

$1^{\circ} = [k]^{y-x} \Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow y = x$

❑ Luego tendremos: $a = vt^x\left(1 + k^{y-y}\right)$

$a = vt^x\left(1 + k^0\right)$

$a = vt^x(1 + 1)$

$a = 2vt^x$

❑ Dimensionalmente: $[a] = [2][v][t]^x$

$LT^{-2} = (1)\left(LT^{-1}\right)(T)^x$

$LT^{-2} = LT^{-1}T^x$

$LT^{-2} = LT^{x-1}$

$T^{-2} = T^{x-1} \Rightarrow x - 1 = -2$

Con lo cual: $x = -1 \Rightarrow y = -1$

Nos piden: "x – 2y" $x - 2y = -1 - 2(-1)$

$$\boxed{x - 2y = 1}$$

8.- En la expresión mostrada. Hallar "z"

$$F^x D^y v^z = (n + \tan\theta)\, m_1\, m_2\, m_3$$

Donde; F : fuerza
D : densidad
v : velocidad
m_1, m_2, m_3 : masas

Solución:

❑ $\tan\theta = \text{número}$

Dimensionalmente; para que $(n + \tan\theta)$ sea homogénea:

$$[n] = [\tan\theta] = 1$$

Con lo cual: $n + \tan\theta = \text{número}$

$$[n + \tan\theta] = 1$$

❑ Con todo el sistema:

$[F]^x[D]^y[v]^z = [n + \tan\theta][m_1][m_2][m_3]$

$\left(MLT^{-2}\right)^x\left(ML^{-3}\right)^y\left(LT^{-1}\right)^z = (1)(M)(M)(M)$

$M^xL^xT^{-2x}M^yL^{-3y}L^zT^{-z} = M^3$

$M^{x+y}L^{x-3y+z}T^{-2x-z} = M^3L^0T^0$

○ $M^{x+y} = M^3 \Rightarrow x + y = 3$

○ $L^{x-3y+z} = L^0 \Rightarrow x - 3y + z = 0$

○ $T^{-2x-z} = T^0 \Rightarrow -2x - z = 0$

Resolviendo: $\boxed{z = -9}$

9.- En la siguiente ecuación dimensionalmente correcta. Determinar la ecuación dimensional de "x".

$$E = \sqrt{Mvx + \sqrt{Mvx + \sqrt{Mvx + \ldots\ldots\infty}}}$$

Donde; M : masa ; v : velocidad

Solución:

$$E = \sqrt{Mvx + \underbrace{\sqrt{Mvx + \sqrt{Mvx + \ldots\ldots\infty}}}_{E}}$$

$E = \sqrt{Mvx + E} \Rightarrow E^2 = Mvx + E$

❑ Dimensionalmente:

$[E]^2 = [M][v][x] = [E]$

$[E]^2 = [E] \Rightarrow [E] = 1$

Además:

$[M][v][x] = [E]$

$[M][v][x] = 1$

$(M)\left(LT^{-1}\right)[x] = 1$

$[x] = \dfrac{1}{MLT^{-1}} \Rightarrow \boxed{[x] = M^{-1}L^{-1}T}$

10.- Si la siguiente expresión es dimensionalmente homogénea. Determinar la ecuación dimensional de "K"

$$K = GM^{(x+y)}L^{(z+x)}T^{(y+z)} + \sqrt{2}M^{(6-2x)}L^{(6-2y)}T^{(6-2z)}$$

Solución:

❑ Dimensionalmente:

$$[G][M]^{(x+y)}[L]^{(z+x)}[T]^{(y+x)} = [\sqrt{2}][M]^{(6-2x)}[L]^{(6-2y)}[T]^{(6-2z)}$$

De donde:

$$[G] = [\sqrt{2}]$$

$$[M]^{(x+y)} = [M]^{(6-2x)} \quad \Rightarrow \quad x + y = 6 - 2x$$

$$[L]^{(z+x)} = [L]^{(6-2y)} \quad \Rightarrow \quad z + x = 6 - 2y$$

$$[T]^{(y+x)} = [T]^{(6-2z)} \quad \Rightarrow \quad y + x = 6 - 2z$$

Resolviendo: $x = y = z = \dfrac{3}{2}$

❑ Luego:

$$[K] = [\sqrt{2}][M]^{(6-2x)}[L]^{(6-2y)}[T]^{(6-2z)}$$

$$[K] = (1)[M]^{\left(6-2\left(\frac{3}{2}\right)\right)}[L]^{\left(6-2\left(\frac{3}{2}\right)\right)}[T]^{\left(6-2\left(\frac{3}{2}\right)\right)}$$

$$\boxed{[K] = M^3L^3T^3}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1.- Halle la dimensión de "H" en la siguiente fórmula física.

$$H = \frac{D \cdot A \cdot V}{F}$$

Donde; D : densidad
A : aceleración
V : volumen
F : fuerza

Rpta. $\boxed{[H] = 1}$

2.- La medida de cierta propiedad (t) en un líquido se determina por la expresión:

$$h = \frac{2t}{rd}$$

Siendo: h medida en m; d, peso específico. ¿Cuál será la ecuación dimensional de t para que r se mida en m?

Rpta. $\boxed{[t] = MT^{-2}}$

3.- Halle la dimensión de "α" y "β" en la siguiente fórmula física.

$$E = \frac{v^2}{\alpha} + \frac{F}{\beta}$$

Donde; E : trabajo ; v : velocidad ; F : fuerza.

Rpta. $\boxed{[\alpha] = M^{-1}}$ $\boxed{[\beta] = L^{-1}}$

4.- Halle la dimensión de A y B en la siguiente fórmula:

$$v = A \cdot t + B \cdot x$$

Donde; v : velocidad ; t : tiempo ; x : distancia

Rpta. $\boxed{[A] = LT^{-2}}$ $\boxed{[B] = T^{-1}}$

5.- Halle la dimensión de A y B en la siguiente fórmula:

$$V = \frac{x^2}{A} + \frac{g}{B}$$

Donde; v : velocidad ; x : distancia ; g : aceleración

Rpta. $\boxed{[A] = LT}$ $\boxed{[B] = T^{-1}}$

6.- Halle la dimensión de "A", "B" y "C" en la siguiente fórmula física:

$$e = A + Bt^2 + Ct^3$$

Donde; e : distancia (m) ; t : tiempo (s)

Rpta. $[A] = L$; $[B] = LT^{-2}$; $[C] = LT^{-3}$

7.- Halle la dimensión de "G", "H" e "I" en la siguiente fórmula física:

$$F = Ga + Hv + I$$

Donde; F : fuerza ; a : aceleración ; v : velocidad

Rpta. $[G] = M$; $[H] = MT^{-1}$; $[I] = MLT^{-2}$

8.- En la siguiente expresión, calcular x + y

$$S = Ka^x t^y$$

K : constante numérica
S : espacio
a : aceleración
t : tiempo

Rpta. 3

9.- Si la siguiente expresión es dimensionalmente homogénea. Determinar:

$$\left[\frac{a}{b}\right] = ?$$

$$20 + t + k = \sqrt{\frac{a+p}{b-q}}$$

a : aceleración
t : tiempo

Rpta. T^2

10.- Si la siguiente expresión es dimensionalmente homogénea; determinar la ecuación dimensional de "C".

$$C = \frac{3Ry^2N^x}{\left(N^x - 2\right)^2}$$

R : longitud
y : aceleración

Rpta. L^3T^{-4}

B PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1.- Determinar la dimensión de "x", si la ecuación es dimensionalmente correcta.

$$xv^2 = \frac{WMa}{\text{sen}\,30°} + bt^2 \text{ ; donde:}$$

v : velocidad a : aceleración
M : masa W : trabajo

Rpta. M^2LT^{-2}

2.- Hallar la ecuación dimensional de z, si la ecuación mostrada, es dimensionalmente correcta:

$$\pi \tan\alpha = \frac{(w + w\log 2) + z\sqrt{3}}{(g + g\,\text{sen}\,\phi)x}$$

w : peso ; g : aceleración

Rpta. MLT^{-2}

3.- Determinar las dimensiones de "a", sabiendo que la siguiente ecuación es dimensionalmente correcta:

$$G = \frac{4\pi^2L^2(L-b)\cos\theta}{T^2 \cdot a}$$

donde; G : aceleración de la gravedad
T : tiempo
b y L : longitud

Rpta. L^2

4.- La fracción mostrada es dimensionalmente correcta y homogénea:

$$\frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{A^8 + B^6 + C^4 + D}$$

y $[A] = L^{-6}T^4$, determinar las dimensiones de "x".

Rpta. $L^{-14}T^{28/3}$

5.- Si la siguiente ecuación es dimensionalmente homogénea, hallar las dimensiones de "b".

$$W = \frac{5F\log a}{x} - \frac{8F^2C}{b^2 + v}$$

W : trabajo
v : velocidad
F : fuerza

Rpta. $L^{1/2}T^{-1/2}$

6.- En la ecuación:

$$P = Kg^y d^x h^z$$

Hallar: (x.y.z)

donde; P: presión
g: aceleración de la gravedad
h: altura
K: constante numérica
d: densidad

Rpta. $\boxed{1}$

7.- En la expresión:

$$\tan\left(A+\frac{\pi\alpha}{2}\right)=\frac{e^{mBL^{\text{sen }30°}}\pm C(F^{\tan^2 60°})^{\cos 60°}}{10^{n-1}}$$

Hallar las dimensiones de A, B y C para que sea dimensionalmente homogénea, donde:

α : ángulo en radianes
L : longitud
F : fuerza
e : base de los logaritmos neperianos
m y n : números

Rpta. A = adimensional
$B = L^{-1/2}$
$C = M^{-3/2}L^{-3/2}T^{3}$

8.- Hallar las dimensiones de "x" e "y", sabiendo que la igualdad mostrada es dimensionalmente correcta.

$$\frac{\left(2-\frac{x}{h}\right)^2}{0{,}85\text{ m}}=\frac{xy}{\sqrt{A_1-A_2}}$$

h : altura
m: masa
A_1, A_2 : areas

Rpta. $x = L$
$y = M^{-1}$

9.- Determinar la dimensión de "b" para que la ecuación sea homogénea.

$$\frac{W}{e}=ba+b^2c$$

Donde; W: trabajo
e : espacio
a : aceleración

Rpta. $\boxed{M}$

10.- Hallar [x][y]:

$$x=\left(\text{sen}(\pi+\alpha)\right)^2\frac{vy}{t}+emB$$

Donde; v : velocidad
e : espacio
m: masa
t : tiempo
B : número real

Rpta. $\boxed{M^2LT^2}$

MEDICIÓN - TEORÍA DE ERRORES

MEDICIÓN

Medición, es el proceso por el cual se compara una magnitud determinada con la unidad patrón correspondiente.

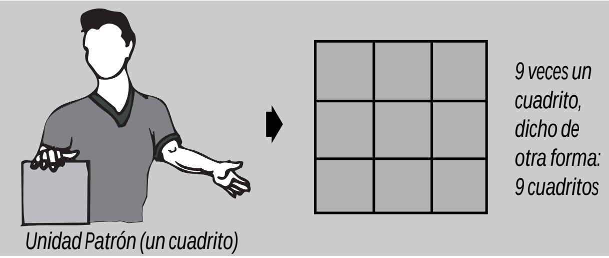
Todos los días una persona utiliza la actividad "medición"; ya sea en nuestras actividades personales, como estudiante o como trabajador.
Cuando estamos en el colegio, por ejemplo; al tomar la asistencia, estamos midiendo la cantidad de alumnos que llegaron a clase; en este caso la unidad patrón será "un alumno".

Cuando jugamos fútbol, el resultado final lo define la diferencia de goles a favor; la unidad patrón será "un gol". En ocasiones cuando nos tomamos la temperatura, nos referimos siempre respecto a una unidad patrón "1°C".

Esto significa que toda medición quedará perfectamente definida cuando la magnitud al que nos referimos termine por ser cuantificada respecto a la unidad patrón correspondiente. Ahora para realizar la medición, generalmente se hace uso de herramientas y/o equipos especiales así como también en algunos casos de los cálculos matemáticos.

El resultado de la medición nos mostrará cuantitativamente el valor de la magnitud; y con ello podemos saber o predecir las consecuencias que conllevan dicho resultado. Así; si medimos la velocidad de un "atleta" y obtenemos como resultado "1 m/s"; sabremos entonces que éste nunca será campeón en una competencia de 100 metros planos; esto significa que gracias a la medición (actividad cuantitativa) podremos saber o predecir los resultados cualitativos.

Ejemplo ilustrativo



CLASES DE MEDICIÓN

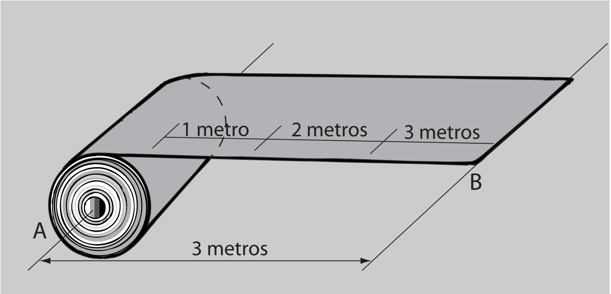
A) *Medición directa*

Es aquella en la cual se obtiene la medida "exacta" mediante un proceso visual, a partir de una simple comparación con la unidad patrón.

Ejemplo Ilustrativo:

Magnitud: Longitud

Unidad patrón: 1 metro

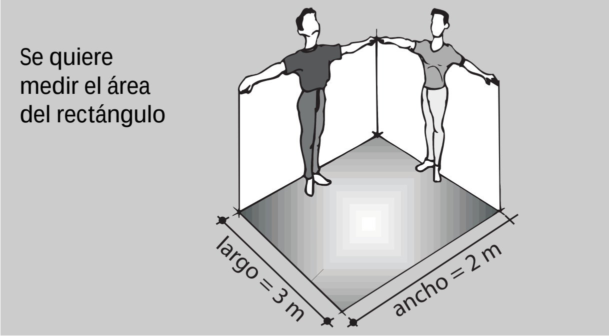


En la figura, es fácil entender que la longitud AB mide 3 veces 1 metro: 3 metros (medición directa).

B) *Medición Indirecta*

Es aquella medida que se obtiene mediante ciertos aparatos o cálculos matemáticos, ya que se hace imposible medirla mediante un proceso visual simple.

Ilustración



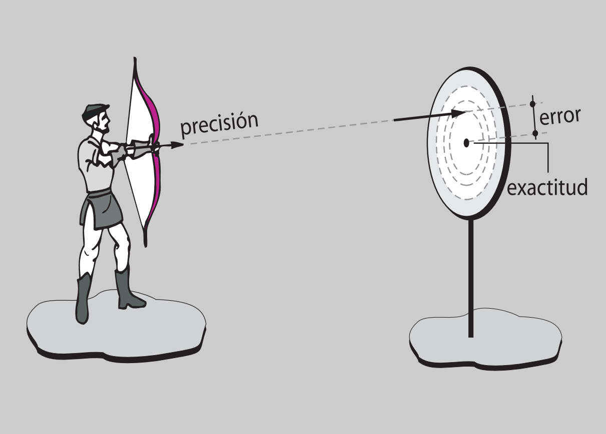
Fórmula:

Area = largo × ancho $\Rightarrow$ A = (3 m)(2 m)

$\boxed{A = 6\ m^2}$ *Se recurrió al uso de una fórmula matemática*

ERRORES EN LA MEDICIÓN

La medición es una actividad que lo ejecuta el hombre provisto o no de un instrumento especializado para dicho efecto.
En toda medición hay que admitir, que por más calibrado que se encuentre el instrumento a usar, siempre el resultado obtenido estará afectado de cierto error; ahora, en el supuesto de que existiendo un aparato perfecto cuyos resultados cifrados coincidieran matemáticamente con la realidad física, nunca llegaríamos a dicho valor, debido a la imposibilidad humana de apuntar al punto preciso o de leer exactamente una escala.



A) *Exactitud*

Es el grado de aproximación a la verdad o grado de perfección a la que hay que procurar llegar.

B) *Precisión*

Es el grado de perfección de los instrumentos y/o procedimientos aplicados.

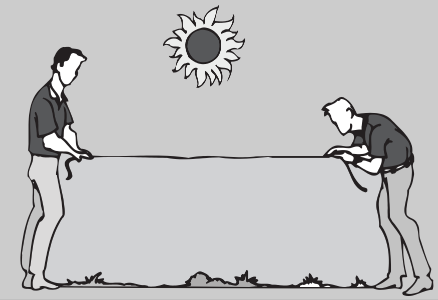
C) *Error*

Podría afirmarse que es la cuantificación de la incertidumbre de una medición experimental respecto al resultado ideal.

CAUSAS DE ERRORES

A) *Naturales*

Son aquellos errores ocasionados por las variaciones meteorológicas (lluvia, viento, temperatura, humedad, etc).



Al medir la longitud entre dos puntos, en días calurosos, la cinta métrica se dilata debido a la fuerte temperatura, luego se cometerá un error de medición.

B) *Instrumentales*

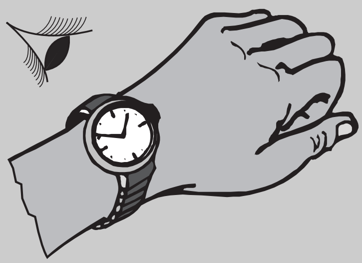
Son aquellos que se presentan debido a la imperfección de los instrumentos de medición.

Las agujas de un cronómetros son susceptibles al retraso o adelanto debido al mecanismo del mismo instrumento, luego se cometerá un error de medición.

C) *Personales*

Son aquellos, ocasionados debido a las limitaciones de los sentidos humanos en las observaciones (vista, tacto, etc.)

La vista de una persona puede no permitir observar correctamente las agujas de un reloj, se cometerá entonces un error personal en la medida del tiempo.

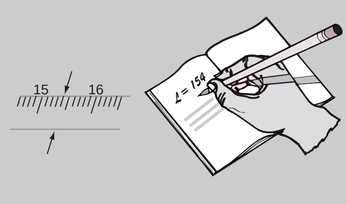


CLASES DE ERRORES

A) *Propios*

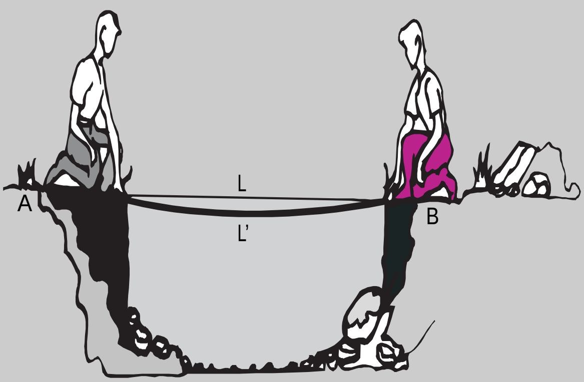
Son aquellos que provienen del descuido, torpeza o distracción del observador, estas no entran en el análisis de la teoría de errores.

Es posible que el operador lea en la cinta métrica 15,40 m y al anotar, escriba por descuido L = 154 m; éste es un error propio, tan grave que no se debe considerar en los cálculos de Teoría de Errores.



B) *Sistemáticos*

Son aquellos que aparecen debido a una imperfección de los aparatos utilizados, así como también a la influencia de agentes externos como: viento, calor, humedad, etc. Estos errores obedecen siempre a una Ley Matemática o Física, por lo cual es posible su corrección.



Supongamos que se quiere medir la longitud AB, pero al usar la cinta métrica, ésta se pandea como muestra la figura, la lectura que se toma en estas condiciones no será la verdadera, habrá que corregir.

$$\boxed{L = L' - \text{corrección}}$$

La corrección se determina mediante la siguiente fórmula:

$$\boxed{\text{corrección} = \frac{W^2 L}{24F}}$$

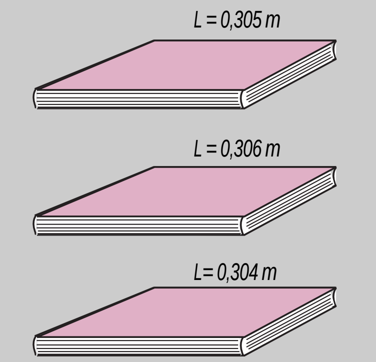
Donde: W, L y F son parámetros conocidos.

NOTA

Esta clase de error no se tomará en cuenta en este libro.

C) *Accidentales o Fortuitos*

Son aquellos que se presentan debido a causas ajenas a la pericia del observador, y al que no puede aplicarse corrección alguna, sin embargo estos errores suelen obedecer a las Leyes de las Probabilidades.
Por tal motivo se recomienda tomar varias lecturas de una misma medición, pues generalmente estas suelen ser diferentes.



Cuando medimos el largo de un libro, cada vez que se mida, la lectura será diferente.

TEORÍA DE ERRORES

Es imposible encontrar el verdadero valor del error accidental; si así fuese, podríamos entonces calcular el valor exacto de la magnitud en medición sumando algebraicamente el valor observado.
No obstante es posible definir ciertos límites de error, impuestos por la finalidad u objetivo de la medición.

Así pues, queda claro que los errores accidentales tienen un rango establecido, cuyo cálculo irán de acuerdo con los principios y métodos de la teoría matemática de errores con aplicación del cálculo de probabilidades.

Estableceremos convencionalmente dos casos:

I.- CUANDO SE REALIZA UNA SOLA MEDICIÓN

Hay casos en las que se toma una sola medición u observación respecto a un patrón establecido, así por ejemplo:

PATRON	*VALOR APROXIMADO*
π = 3,141 592 654	3,141 6
g = 9,8 m/s^2	10 m/s^2
tan 37º = 0,753 554 05	0,75

Es importante establecer entonces bajo que error se está trabajando.

A) *Valor verdadero (A)*

Es el valor "exacto" o patrón que se establece en una medición, en realidad, tal valor "exacto" no existe, pero se suele establecer de acuerdo al tipo de trabajo a realizar; así por ejemplo, el valor verdadero de la constante (π) se puede considerar como 3,141 6.

B) Error Absoluto(E_A)

Es la diferencia entre el valor verdadero y el aproximado.

$$E_A = A' - A$$

Donde; E_A : error absoluto
A : valor verdadero
A' : valor aproximado

C) Error Relativo (E_R)

Llamado también error porcentual y nos determina según parámetros establecidos si la equivocación puede ser aceptable o no.

$$E_R = \frac{E_A}{A}100\%$$

Donde; E_R : error relativo
E_A : error absoluto
A : valor verdadero

2.- CUANDO SE REALIZA DOS O MÁS MEDICIONES

Generalmente cuando se lleva a cabo una medición, no se conoce el valor verdadero; es por esto que se recomienda tomar varias mediciones, no obstante, jamás se podrá conocer el valor exacto.

A) Media ($\overline{X}$)

Es el valor que tiende a situarse en el centro del conjunto de datos ordenados según su magnitud. Es la media aritmética de un conjunto de datos.

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

Ejemplo: 10,20 ; 10,22; 10,18

$$\overline{X} = \frac{10,20 + 10,22 + 10,18}{3}$$

$$\boxed{\overline{X} = 10,20}$$

B) Desviación (V)

Se le llama también error aparente de una medición. Es la diferencia entre la media y el valor correspondiente a una medición.

Ejemplo:

10,20 $\Rightarrow$ V = 10,20 – 10,20 = 0
10,22 $\Rightarrow$ V = 10,20 – 10,22 = -0,02
10,18 $\Rightarrow$ V = 10,20 – 10,18 = +0,02

C) Desviación típica ó stándar (σ)

Viene a ser el promedio de todas las desviaciones de las mediciones realizadas.

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\Sigma V^2}{n-1}} \qquad 2 \le n \le 30$$

Donde;

σ : desviación típica o stándar
V : desviación de cada medición
n : número de mediciones

Para la explicación de la presente expresión, partiremos diciendo que el número mínimo de mediciones tendrá que ser dos, de lo contrario no tendría sentido hablar de promedio y por ende de desviación. Por otro lado no es difícil deducir que el promedio de todas las desviaciones sería:

$$\frac{\Sigma V}{n}$$

Sin embargo, en la práctica, el resultado de dicha expresión siempre será cero; es por ello que se utiliza la suma de los cuadrados, la cual nunca se anulará.

D) Error probable de una observación (E_0)

Es aquel intervalo [-E_0 , + E_0], dentro de cuyos límites puede caer o no el verdadero error accidental con una probabilidad del 50%.

$$E_0 = \pm 0,674\,5\,\sigma$$

Donde;

E_0 : error probable de una observación
σ : desviación típica o stándar.

E) *Error relativo (E_R)*

Es la relación entre E_0 y la media $\overline{X}$; y viene a ser el parámetro que califica la calidad del trabajo.

$$E_R = \pm \frac{E_0}{\overline{X}}$$

ó

$$E_R = \pm \frac{1}{\left(\dfrac{\overline{X}}{E_0}\right)}$$

Donde;

E_R : error relativo
$\overline{X}$: media
E_0 : error probable de una observación

Ejemplo:

Supongamos que se desea realizar un trabajo de laboratorio, donde es requisito para obtener las metas deseadas un error relativo menor que $\left|\dfrac{1}{3\,000}\right|$; si el trabajo de laboratorio arrojó un $E_R = \pm\dfrac{1}{4\,000}$

Tendremos:

$$\left|\frac{1}{4\,000}\right| < \left|\frac{1}{3\,000}\right|$$

De donde se deduce que el trabajo realizado es aceptable; de lo contrario habrá que volver a empezar.

F) *Error probable de la media (E)*

Está visto que la media, también está sujeto a error.
El error probable de la media al 50% de probabilidad se puede determinar así:

$$E = \pm 0{,}674\,5\sqrt{\frac{\Sigma V^2}{n(n-1)}}$$

Donde;

E : error probable de la media
V : desviación de cada medición
n : número de mediciones

G) *Valor más probable (V.M.P.)*

Es aquel que se acerca más al verdadero valor pero que no lo es.
Comúnmente se considera a la media como el valor más probable de varias mediciones.

$$V.M.P. = \overline{X}$$

Donde;

V.M.P. : valor más probable
$\overline{X}$: media

Como quiera que el V.M.P. nunca será el valor verdadero, se deduce que existirá un error y que dicho valor exacto estará ubicado dentro del rango de ciertos límites; este será:

$$[V.M.P. - E \ , \ V.M.P. + E]$$

Donde;
E : error probable de la media

TEST

1.- ...., es el proceso por el cual se compara una magnitud determinada con la unidad .... previamente establecida.

a) Estimación – base
b) Medición – patrón
c) Estimación – de comparación
d) Medición – base
e) Marcación – estelar

2.- Señalar verdadero o falso en las siguientes proposiciones:

I.- Exactitud, es el grado de aproximación a la verdad o perfección a la que se procura llegar.
II.- Precisión instrumental o procedimental, es el grado de perfección alcanzado.
III.- Error, es la cuantificación de la incertidumbre de una medición experimental respecto al resultado ideal.

a) VFF
b) VFV
c) FFV
d) VVV
e) FVF

3.- ¿Cuál de las alternativas no puede ser una causa de error en las mediciones?

a) Naturales.
b) Instrumentales.
c) Personales.
d) Temperamentales.
e) N.A.

4.- Errores.................. provienen del descuido, torpeza o distracción del observador, estas no entran en el análisis de...............

a) Sistemáticos – teoría de errores.
b) Propios – la teoría de errores.
c) Accidentales – métodos científicos.
d) Fortuitos – métodos científicos.
e) N.A.

5.- ¿Cuál es la media o promedio ponderado de las mediciones de cierta varilla cuyas medidas obtenidas fueron:

12 cm ; 14 cm ; 11 cm ; 13 cm ; 12 cm

a) 12 cm
b) 12,2 cm
c) 12,4 cm
d) 11,8 cm
e) 12,8 cm

6.- La media de un grupo de medidas de cierto peso es 28,5 g, siendo una de las medidas obtenidas 27,8 g; la desviación sería:

a) +1,3 g
b) –1,3 g
c) –0,7 g
d) +0,7 g
e) +0,9 g

7.- En la medición de la longitud de un terreno, el valor más probable obtenido: 100,212 ± 0,000 8; esto significa que:

a) El valor real está comprendido entre 100,211 2 y 100,212 8.
b) El valor que más se acerca es 100,22
c) El valor más probable es 100,212 8
d) El valor menos probable es 100,212 6
e) N.A.

8.- La media de 5 mediciones a sido 12,6, si una de estas mediciones fue 12,7, hallar la desviación aparente obtenida.

a) 0,1
b) –0,1
c) 25,3
d) –25,3
e) N.A.

9.- ¿Cuánto pague por 0,5 Mg, 300 kg, 50 Hg de arroz a S/. 2,00 el kilo?

a) S/. 10 000
b) S/. 5 000
c) S/. 1 610
d) S/. 9 050
e) N.A.

10.- La suma de los cuadrados desviaciones de cierto grupo de medidas (cinco mediciones) fue 81. Hallar su desviación típica o stándar.

a) 6,5
b) 5,5
c) 3,5
d) 8,5
e) 4,5

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1.- Se ha obtenido los siguientes valores al determinar la masa de un cuerpo: 2,350 g; 2,352 g; 2,348 g y 2,350 g. ¿Cuál es el valor más probable?

Solución:

$\text{V.M.P.} = \bar{X}$

Calculando la media: $\bar{X}$

$$\bar{X} = \frac{2,350 + 2,352 + 2,348 + 2,350}{4}$$

$$\bar{X} = 2,350$$

Luego: $\boxed{\text{V.M.P.} = 2,350}$

2.- Consideremos la longitud de una mesa 112,8 cm; al medirla hemos obtenido 113,4 cm; hallar el error absoluto y el error relativo.

Solución:

❑ Calculando el error absoluto

$$E_A = A' - A$$
$$E_A = 113,4 - 112,8$$
$$\boxed{E_A = +0,6\ \text{cm (por exceso)}}$$

❑ Calculado el error relativo

$$E_R = \frac{E_A}{A} \times 100\%$$
$$E_R = \frac{0,6}{112,8} \times 100\%$$
$$\boxed{E_R = 0,53\%}$$

3.- ¿Qué error relativo, se comete al dar a π = 3,141 6 el valor 3,14?

Solución:

❑ Calculando el error absoluto

$$E_A = A' - A$$
$$E_A = 3,14 - 3,1416$$
$$\boxed{E_A = -0,0016\ \text{(por defecto)}}$$

❑ Calculado el error relativo

$$E_R = \frac{E_A}{A} \times 100\%$$
$$E_R = \frac{-0,0016}{3,1416} \times 100\%$$
$$\boxed{E_R = -0,051\%}$$

4.- Un alumno A mide la longitud de un hilo de 5 m y halla un valor de 6 m, otro alumno B mide la longitud de un paseo de 500 m y halla un valor de 501 m. ¿Qué error absoluto se cometió en cada caso?, ¿qué medida fué más precisa?

Solución:

En el cuadro mostrado notamos que ambos alumnos cometieron el mismo error absoluto: 1 metro por exceso, y la medida más precisa fue la del alumno B, ya que cometió un error relativo menor.

ALUMNO	*ERROR ABSOLUTO*	*ERROR RELATIVO*
A	1 m (exceso)	$\frac{1}{5} \times 100 = 20\%$
B	1 m (exceso)	$\frac{1}{500} \times 100 = 0,2\%$

5.- ¿Con cuántas cifras decimales debemos tomar el número π = 3,141 59 para que su error relativo sea menor del 0,1%?

Solución:

$$E_R < 0,1\%$$
$$\frac{E_A}{A} \times 100\% < 0,1\%$$
$$\frac{E_A}{3,14159} \times 100\% < 0,1\%$$
$$E_A < 0,00314$$

Rpta. $\boxed{\text{Dos cifras decimales}}$

Verificando:

$$E_R = \frac{3,14 - 3,14159}{3,14159} \times 100\%$$

Tomando valor absoluto:

$$E_R = +0,05\% < 0,1\%$$

B PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1.- En la medida de 1 metro, se ha cometido un error de 1 mm y en 300 km un error de 300 m. ¿Qué error relativo es mayor?

Solución:

❑ Cuando L = 1 m
A = 1 000 mm

$$E_R = \frac{E_A}{A} \times 100\%$$

$$E_R = \frac{1}{1\,000} \times 100\%$$

$$E_R = 0{,}1\%$$

❑ Cuando L = 300 km
A = 300 000 m

$$E_R = \frac{E_A}{A} \times 100\%$$

$$E_R = \frac{300}{300\,000} \times 100\%$$

$$E_R = 0{,}1\%$$

Rpta. Los dos tienen igual error relativo

2.- ¿Qué medida es más precisa: La de un químico que pesa 200 mg con una balanza que aprecia el miligramo o la de un tendero que pesa 2 kg de arroz con una balanza que aprecia el gramo?

Solución:

Será más precisa aquella pesada cuyo error relativo sea menor.

❑ Con el químico:

$$E_R = \frac{E_A}{A} \times 100\%$$

$$E_R = \frac{1\,\text{mg}}{200\,\text{mg}} \times 100\%$$

$$E_R = 0{,}5\%$$

❑ Con el tendero

$$E_R = \frac{1\,\text{g}}{2\,000\,\text{g}} \times 100\%$$

$$E_R = 0{,}05\%$$

Rpta. Es más precisa la medida del tendero

3.- Consideremos la siguiente serie de mediciones realizadas con un esferómetro:

MEDICIONES	ERRORES (V)	V^2
4,556 mm	+0,001	0,000 001
4,559 mm	-0,002	0,000 004
4,553 mm	+0,004	0,000 016
4,561 mm	-0,004	0,000 016
4,562 mm	-0,005	0,000 025
4,555 mm	+0,002	0,000 004
4,557 mm	0,000	0,000 000
4,553 mm	+0,004	0,000 016
4,556 mm	+0,001	0,000 001
4,558 mm	-0,001	0,000 001
$\overline{X}$ = 4,557 mm	$\Sigma V = 0{,}000$	$\Sigma V^2 = 0{,}000\,084$

¿Cómo se debe expresar el resultado final de las mediciones?

Solución:

❑ Calculando el error probable de la media (E)

$$E = \pm 0{,}674\,5\sqrt{\frac{\Sigma V^2}{n(n-1)}}$$

$$E = \pm 0{,}674\,5\sqrt{\frac{0{,}000\,084}{10(9)}}$$

$$E = \pm 0{,}000\,7$$

❑ El valor más probable: V.M.P. = $\overline{X}$ = 4,557

Luego el resultado final podrá ser expresado.

$$\boxed{4{,}557 \pm 0{,}000\,7}$$

Del concepto de teoría de errores, se deduce que hay un 50% de probabilidades de que el verdadero valor del resultado final esté comprendido entre 4,556 3 m y 4,557 7 m.

4.- Se ha medido la longitud de un terreno, los datos obtenidos en metros son:

1° Medición : 100,212
2° Medición : 100,210
3° Medición : 100,214

Se pide: A) Calcular la media.
B) Calcular la desviación típica o stándar (σ).

Solución:

A) Son tres mediciones n = 3

$$\bar{X}=\frac{100,212+100,210+100,214}{3}=\frac{300,636}{3}$$

$$\boxed{\bar{X}=100,212}$$

B) Tabulando

MEDIDA	$V=\bar{X}-X_i$	V^2
100,212	0	0
100,210	+0,002	4×10^{-6}
100,214	-0,002	4×10^{-6}
	Sumatoria	8×10^{-6}

$$\sigma=\pm\sqrt{\frac{\Sigma V^2}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{8\times10^{-6}}{3-1}}$$

$$\boxed{\sigma=\pm0,002}$$

5.- En el problema anterior calcular:

A) El error relativo
B) El resultado final

Solución:

A) $$E_R=\pm\frac{E_0}{\bar{X}}=\pm\frac{1}{\frac{\bar{X}}{E_0}}$$

$$E_0=\pm0,674\,5\sigma=\pm0,674\,5(0,002)$$

$$E_0=\pm0,001\,349$$

$$E_R=\pm\frac{1}{\frac{100,212}{0,001\,349}}=\frac{1}{74\,286}$$

$$\boxed{E_R=\frac{1}{74\,286}}$$

B) $$E=\pm0,674\,5\sqrt{\frac{\Sigma V^2}{n(n-1)}}$$

$$E=\pm0,674\,5\sqrt{\frac{8\times10^{-6}}{3(2)}}$$

$$E=\pm0,000\,8$$

El V.M.P. = $\bar{X}$ = 100,212

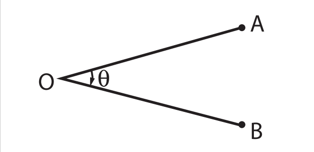
Luego el resultado final podrá ser expresado:

$$\boxed{100,212\pm0,000\,8}$$

Esto significa que hay un 50% de probabilidades de que el verdadero valor del resultado final esté comprendido entre 100,211 2 y 100,212 8.

6.- Con ayuda de un teodolito se midió un ángulo, realizando una observación angular en ocasiones diferentes y por diferentes observadores. Calcular la media.

Los datos de campo son:



θ_1 = 40° 20‘ 10“ 1 medida
θ_2 = 40° 20‘ 30“ 4 medidas
θ_3 = 40° 20‘ 50“ 3 medidas

Calcular la media.

Solución:

$$n=1+4+3=8 \text{ observaciones}$$

$$\bar{\theta}=\frac{(1)\theta_1+(4)\theta_2+(3)\theta_3}{8}$$

$$\bar{\theta}=\frac{40°\,20‘\,10“+4(40°\,20‘\,30“)+3(40°\,20‘\,50“)}{8}$$

$$\bar{\theta}=\frac{322°\,44‘\,40“}{8}\Rightarrow\boxed{\bar{\theta}=40°\,24‘\,35“}$$

7.- Se ha efectuado la medición de una distancia y los resultados obtenidos son:

1° Medición : 800,213 m
2° Medición : 800,220 m
3° Medición : 800,603 m
4° Medición : 800,218 m

Se pide: Calcular el error relativo

Solución:

En primer lugar, si analizamos el valor de cada medición, respecto a los demás, será fácil detectar que la tercera medición tiene un valor muy lejano a las otras mediciones, lo cual hace deducir que en el proceso de medición se debió cometer un error propio (en la 3° medición), por tal motivo no se tomará en cuenta en los cálculos.

Luego; 1° Medición : 800,213 m
2° Medición : 800,220 m
3° Medición : 800,218 m

n = 3

$$\bar{X}=\frac{800,213+800,220+800,218}{3}=\frac{2\,400,651}{3}$$

$$\bar{X}=800,217\text{ m}$$

❑ Tabulando

MEDIDA	$V = \bar{X} - X_i$	V^2
800,213	+0,004	16×10^{-6}
800,220	-0,003	9×10^{-6}
800,218	-0,001	1×10^{-6}
	Sumatoria	26×10^{-6}

❑ $\sigma = \pm\sqrt{\dfrac{\Sigma V^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\dfrac{26\times10^{-6}}{3-1}}$

$\sigma = \pm 0{,}003\,6$

❑ $E_0 = \pm 0{,}674\,5\sigma = \pm 0{,}674\,5(0{,}003\,6)$

$E_0 = \pm 0{,}002\,428\,2$

❑ $E_R = \pm\dfrac{E_0}{\bar{X}} = \pm\dfrac{1}{\dfrac{\bar{X}}{E_0}}$

$E_R = \pm\dfrac{1}{\dfrac{800{,}217}{0{,}002\,428\,2}} \Rightarrow \boxed{E_R = \pm\dfrac{1}{329\,552}}$

8.- En el problema anterior, determinar el resultado final.

Solución:

$E = \pm 0{,}674\,5\sqrt{\dfrac{\Sigma V^2}{n(n-1)}} = \pm 0{,}674\,5\sqrt{\dfrac{26\times10^{-6}}{2(3)}}$

$E = \pm 0{,}001\,4$

V.M.P. = $\bar{X}$ = 800,217

Luego el resultado final podrá ser expresado:

$\boxed{800{,}217 \pm 0{,}001\,4}$

9.- Se ha pesado varias veces un saco de papas y los datos obtenidos son:

100,44 N ; 100,46 N ;100,50 N ; 100,10 N

Calcular el error relativo, si la tolerancia máxima permitida es 0,20 N.

Solución:

❑ n = 4

$\bar{X} = \dfrac{100{,}44 + 100{,}46 + 100{,}50 + 100{,}10}{4}$

$\bar{X} = 100{,}375\,N$

❑ Tabulando:

MEDIDA	$V = \bar{X} - X_i$
100,44	-0,065
100,46	-0,085
100,50	-0,125
100,10	+0,275 → valor mayor que 0,20 (tolerancia)

Observamos que la desviación V correspondiente a 100,10 es mayor que el permitido; si analizamos inicialmente el problema, es fácil darse cuenta que 100,10 esta muy lejos a los demás datos, seguramente se cometió algún error propio.
Por lo tanto no se tomará en cuenta en los cálculos.

❑ Ahora tendremos: n = 3

$\bar{X} = \dfrac{100{,}44 + 100{,}46 + 100{,}50}{3} \Rightarrow \bar{X} = 100{,}467\,N$

❑ Tabulando:

MEDIDA	$V = \bar{X} - X_i$	V^2
100,44	+0,027	$72{,}9\times10^{-5}$
100,46	+0,007	$4{,}90\times10^{-5}$
100,50	-0,033	$108{,}90\times10^{-5}$
	Sumatoria	$186{,}7\times10^{-5}$

❑ $E_0 = \pm 0{,}674\,5\sigma = \pm 0{,}674\,5\sqrt{\dfrac{\Sigma V^2}{n-1}}$

$E_0 = \pm 0{,}020\,608$

❑ $E_R = \pm\dfrac{1}{\left(\dfrac{\bar{X}}{E_0}\right)} = \pm\dfrac{1}{\dfrac{100{,}467}{0{,}020\,608}}$

$\boxed{E_R = \pm\dfrac{1}{4\,875}}$

10.- En el problema anterior, expresar el resultado final.

Solución:

❑ Calculando el error probable de la media.

$E = \pm 0{,}674\,5\sqrt{\dfrac{\Sigma V^2}{n(n-1)}} = \pm 0{,}674\,5\sqrt{\dfrac{186{,}7\times10^{-5}}{3(2)}}$

$E = \pm 0{,}012$

❑ El valor más probable: V.M.P. = $\bar{X}$ = 100,467 N

Luego el resultado final podrá ser expresado.

$\boxed{100{,}467\,N \pm 0{,}012\,N}$